$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (Yi - \overline{Y})^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Yi - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X}) + \alpha * (X_i - \overline{X})\right)^2$$

Soit :

$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right)^2 + \frac{2}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right) * \left(\alpha * (X_i - \overline{X})\right) + \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha * (X_i - \overline{X})\right)^2$$

Soit :

$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right)^2 + \frac{2 * \alpha}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right) * \left(X_i - \overline{X}\right) + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Pour le terme central :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right) * \left(X_i - \overline{X}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y}\right) * \left(X_i - \overline{X}\right) - \alpha * \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right) * \left(X_i - \overline{X}\right)$$

Soit, par définition de α :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right) * \left(X_i - \overline{X}\right) = \text{Covariance}(X, Y) - \alpha * \text{Variance}(X) = 0$$

Donc en éliminant le terme central :

$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} - \alpha * (X_i - \overline{X})\right)^2 + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Soit :

$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \alpha * X_i - (\overline{Y} - \alpha * \overline{X})\right)^2 + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Soit puisque la droite de régression passe par le point $(\overline{X}, \overline{Y})$:

$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\alpha * X_i + \beta))^2 + \frac{\alpha^2}{n} * \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Posons :

$$r = \frac{\text{Covariance}(X, Y)}{\sigma_X * \sigma_Y}$$

Donc :

$$\alpha = r * \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Alors :

$$\sigma_Y{}^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\alpha * X_i + \beta))^2 + r^2 * \sigma_Y{}^2$$